# 与对称矩阵可交换的反对称矩阵

黄益生 [1]　姚海鹭

(三明学院数学与计算机科学系 福建 三明 365004)

**摘要**. 本文引入对称矩阵的导出矩阵与次导出矩阵的概念，给出 $n$ 阶对称矩阵与 $n$ 阶反对称矩阵是可交换的两个等价条件. 同时，利用导出矩阵和次导出矩阵的秩，对 3 阶对称矩阵进行分类，并且对每一种类型的 3 阶对称矩阵，求出与它可交换的所有 3 阶反对称矩阵.

**关键词**. 对称矩阵；反对称矩阵；交换性；导出矩阵；次导出矩阵

**中图分类号**. O151

在矩阵论中，对称矩阵与反对称矩阵是两类特殊矩阵，有许多重要应用. 我们知道，矩阵的乘法不满足交换律. 如果两个同阶方阵 $A$ 与 $B$ 的乘积等于 $B$ 与 $A$ 的乘积，即 $AB = BA$, 那么称 $A$ 与 $B$ 是可交换的. 一般地，当 $A$ 是对称的，$B$ 是反对称的时，它们是不可交换的. 例如，容易验证，当 $A$ 是 2 阶非纯量对称矩阵，$B$ 是 2 阶非零反对称矩阵时，$A$ 与 $B$ 必不可交换. 这就导致我们考虑，在什么条件下，一个对称矩阵与一个反对称矩阵是可交换的？怎样求出与对称矩阵可交换的反对称矩阵？经网上搜索，没有发现与这些问题有关的文献.

在本文中，我们将首先给出一个 $n$ 阶对称矩阵 $A$ 与一个 $n$ 阶反对称矩阵 $B$ 是可交换的一个充要条件，然后引入对称矩阵 $A$ 的导出矩阵与次导出矩阵的概念，并给出 $A$ 与 $B$ 是可交换的另一个充要条件. 同时，我们将利用导出矩阵与次导出矩阵的秩，对 3 阶对称矩阵进行分类，并且对每一种类型的 3 阶对称矩阵，求出与它可交换的所有 3 阶反对称矩阵.

有关矩阵的概念及其性质，我们参照文献 [1] 和 [2].

我们用符号 $\mathrm{rank}(A)$ 来表示矩阵 $A$ 的秩，并用 $A'$ 来表示 $A$ 的转置矩阵. 于是 $A$ 是对称的意味着 $A' = A$, 它是反对称的意味着 $A' = -A$. 如果 $A = (a_{ij})$ 是一个 $n$ 阶方阵，那么 $A$ 是对称的当且仅当 $a_{ij} = a_{ji}$, 它是反对称的当且仅当 $a_{ij} = -a_{ji}$, 这里 $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

**命题 1.** 设 $A$ 是数域 $F$ 上的一个 $n$ 阶对称矩阵，$B$ 是数域 $F$ 上的一个 $n$ 阶反对称矩阵，则 $A$ 与 $B$ 是可交换的当且仅当它们的乘积 $AB$ 是反对称的.

**证明**. 根据已知条件，有 $A' = A$ 且 $B' = -B$. 根据穿脱原理，有 $(AB)' = B'A'$, 所以

$$(AB)' = -BA. \tag{i}$$

现在，如果 $A$ 与 $B$ 是可交换的，即 $AB = BA$, 那么由 (i) 式，我们有 $(AB)' = -AB$, 所以 $AB$ 是反对称的. 反之，如果 $AB$ 是反对称的，即 $(AB)' = -AB$, 那么由 (i) 式，我们有 $-AB = -BA$, 所以 $AB = BA$, 因此 $A$ 与 $B$ 是可交换的. □

设 $A$ 与 $B$ 分别是数域 $F$ 上的一个 $n$ 阶对称矩阵和一个 $n$ 阶反对称矩阵 $(n > 1)$. 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad 且 \quad B = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

[1]基金项目：福建省教育厅高等学校教学质量工程资助项目 (ZL09021TZ(SJ)).

令 $c_{ij}$ 是 $A$ 与 $B$ 的乘积 $AB$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素 $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则当 $i = j$ 时，有

$$c_{ij} = a_{1i}x_{1i} + \cdots + a_{i-1,\,i}x_{i-1,\,i} - a_{i,\,i+1}x_{i,\,i+1} - \cdots - a_{in}x_{in};$$

当 $i < j$ 时，有

$$c_{ij} = a_{1i}x_{1j} + \cdots + a_{ii}x_{ij} + a_{i,\,i+1}x_{i+1,\,j} + \cdots + a_{i,\,j-1}x_{j-1,\,j} - a_{i,\,j+1}x_{j,\,j+1} - \cdots - a_{in}x_{jn};$$

当 $i > j$ 时，有

$$c_{ij} = a_{1i}x_{1j} + \cdots + a_{j-1,\,i}x_{j-1,\,j} - a_{j+1,\,i}x_{j,\,j+1} - \cdots - a_{ii}x_{ji} - a_{i,\,i+1}x_{j,\,i+1} - \cdots - a_{in}x_{jn}.$$

根据命题 1, 下列断语成立：$A$ 与 $B$ 是可交换的当且仅当下列 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个等式同时成立：

$$c_{ii} = 0 \ \text{ 且 } \ c_{ij} = -c_{ji}, \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

即

$$\begin{array}{ccccc}
c_{11} = 0, & c_{22} = 0, & c_{33} = 0, & \cdots, & c_{nn} = 0, \\
 & c_{12} + c_{21} = 0, & c_{13} + c_{31} = 0, & \cdots, & c_{1n} + c_{n1} = 0, \\
 & & c_{23} + c_{32} = 0, & \cdots, & c_{2n} + c_{n2} = 0, \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & c_{n-1,\,n} + c_{n,\,n-1} = 0.
\end{array}$$

如果我们把 $A$ 的元素看作常数，并把 $B$ 的 (主对角线上方) 元素看作未知量，那么这 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个等式构成一个 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 元齐次线性方程组. 令 $\boldsymbol{C}$ 是方程组的系数矩阵，则上述断语可以改写如下：$A$ 与 $B$ 是可交换的当且仅当 $B$ 的 (主对角线上方) 元素是方程组 $\boldsymbol{C}X = \boldsymbol{0}$ 的一个解.

显然矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数为 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 列数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$. 为了便于叙述，我们引入两个术语如下.

**定义 1.** 上述齐次线性方程组 $\boldsymbol{C}X = \boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为对称矩阵 $A$ 的**导出矩阵**, 由 $\boldsymbol{C}$ 的前 $n$ 行组成的矩阵称为 $A$ 的**次导出矩阵**, 记作 $\boldsymbol{D}$.

于是下列命题成立.

**命题 2.** *设 $A$ 是数域 $F$ 上的一个 $n$ 阶对称矩阵 $(n > 1)$, 并设 $\boldsymbol{C}$ 是 $A$ 的导出矩阵. 令 $B = (b_{ij})$ 是数域 $F$ 上的一个 $n$ 阶反对称矩阵，则 $A$ 与 $B$ 是可交换的当且仅当 $B$ 的主对角线上方元素*

$$b_{12}, b_{13}, \cdots, b_{1n}, b_{23}, \cdots, b_{2n}, b_{34}, \cdots, b_{3n}, \cdots, b_{n-1,n}$$

*是齐次线性方程组 $\boldsymbol{C}X = \boldsymbol{0}$ 的一个解.*

命题 2 表明，可以通过解方程组 $\boldsymbol{C}X = \boldsymbol{0}$, 求出与对称矩阵 $A$ 可交换的所有反对称矩阵.

当 $A$ 的阶数 $n$ 较大时，它的导出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和次导出矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的形状比较复杂. 下面让我们来看看，当 $n = 3$ 时，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 具有什么形状. 为了便于书写，我们令

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \ \text{ 且 } \ B = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix},$$

那么

$$AB = \begin{pmatrix} -bx - cy & ax - cz & ay + bz \\ -dx - ey & bx - ez & by + dz \\ -ex - fy & cx - fz & cy + ez \end{pmatrix}.$$

根据命题 1, 有

$$\begin{array}{ccc}
-bx - cy = 0, & bx - ez = 0, & cy + ez = 0, \\
ax - cz = dx + ey, & ay + bz = ex + fy, & by + dz = -cx + fz.
\end{array}$$

换句话说，

$$\begin{array}{ccc}
bx + cy = 0, & bx - ez = 0, & cy + ez = 0, \\
(a-d)x - ey - cz = 0, & ex + (f-a)y - bz = 0, & cx + by + (d-f)z = 0.
\end{array}$$

因此 $A$ 的导出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 与次导出矩阵 $\boldsymbol{D}$ 分别为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ b & 0 & -e \\ 0 & c & e \\ a-d & -e & -c \\ e & f-a & -b \\ c & b & d-f \end{pmatrix} \text{ 且 } \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ b & 0 & -e \\ 0 & c & e \end{pmatrix}.$$

下面我们将利用导出矩阵和次导出矩阵的秩，把 3 阶对称矩阵分成几种类型，然后对每一种类型的 3 阶对称矩阵，求出与它可交换的所有 3 阶反对称矩阵. 首先给出一个命题如下.

**命题 3.** 设 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$. 令 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 分别是 $A$ 的导出矩阵与次导出矩阵，则

(1) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D}) \leqslant 2$ 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{C})$;

(2) 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=1$, 则 $b, c, e$ 这三个数中只有一个不等于零;

(3) 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})<2$, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=0$, 即 $\boldsymbol{C}$ 是零矩阵;

(4) 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=2$ 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=0$, 则 $a, d, f$ 这三个数中只有两个相等;

(5) 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=2$ 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=1$, 则当 $b \neq 0$ 时，有 $(f-a)(f-d)=b^2$; 当 $c \neq 0$ 时，有 $(d-a)(d-f)=c^2$; 当 $e \neq 0$ 时，有 $(a-d)(a-f)=e^2$.

(6) 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=2$ 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=2$, 则 $b, c, e$ 全不为零，并且

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{e}=\frac{d}{b}-\frac{e}{c}, \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{e}=\frac{f}{c}-\frac{e}{b}, \quad \frac{b}{c}-\frac{d}{e}=\frac{c}{b}-\frac{f}{e}.$$

**证明**. (1) 根据前面的讨论，$A$ 的次导出矩阵为 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ b & 0 & -e \\ 0 & c & e \end{pmatrix}$. 容易计算，行列式 $|\boldsymbol{D}|$ 等于零，所以 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D}) \leqslant 2$. 其次，由于 $\boldsymbol{D}$ 的每一个子式是 $\boldsymbol{C}$ 的一个子式，因此 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{C})$.

(2) 已知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=1$, 那么 $b, c, e$ 中至少有一个不等于零，并且 $\boldsymbol{D}$ 的任意两行对应元素成比例. 于是当 $b \neq 0$ 时，由 $\boldsymbol{D}$ 的前两行可见，$c=e=0$. 当 $c \neq 0$ 时，由 $\boldsymbol{D}$ 的第 1 行和第 3 行可见，$b=e=0$. 当 $e \neq 0$ 时，由 $\boldsymbol{D}$ 的后两行可见，$b=c=0$.

(3) 已知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})<2$, 那么由 (1), 有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})<2$. 如果 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=1$, 根据 (2), $b, c, e$ 这三个数中只有一个不等于零. 不妨设 $b \neq 0$, 那么

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a-d & 0 & 0 \\ 0 & f-a & -b \\ 0 & b & d-f \end{pmatrix}. \tag{ii}$$

注意到 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})<2$, 因此 $\boldsymbol{C}$ 的任意两列对应元素成比例. 于是由 $\boldsymbol{C}$ 的前两列可见，$b=0$. 这与 $b \neq 0$ 矛盾. 此矛盾表明，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=0$, 即 $b, c, e$ 全为零. 现在，用数 0 代替 (ii) 式中的 $b$, 并注意到 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})<2$, 我们看到，$a-d$, $f-a$, $d-f$ 这三个数中至少有两个等于零. 不妨设 $a-d=0$ 且 $f-a=0$, 那么 $d=a$ 且 $f=a$, 所以 $d-f=0$. 这就证明了，$\boldsymbol{C}$ 是零矩阵.

(4) 已知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=2$ 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=0$, 那么 $b, c, e$ 全为零，并且 $a-d$, $f-a$, $d-f$ 这三个数中有一个等于零，另两个不等于零，所以 $a, d, f$ 这三个数中只有两个相等.

(5) 已知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=1$. 根据 (2), $b, c, e$ 这三个数中只有一个不等于零. 当 $b \neq 0$ 时，$\boldsymbol{C}$ 就是 (ii) 式中的矩阵. 又已知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=2$, 那么由 $\boldsymbol{C}$ 的第 1, 5, 6 行组成的行列式等于零，所以

$$b[(f-a)(d-f)+b^2]=0.$$

再加上 $b\neq 0$, 因此 $(f-a)(f-d)=b^2$. 类似地，可证另外两种情形.

(6) 已知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=2$, 那么 $b, c, e$ 这三个数中至少有两个不等于零. 不妨设 $b\neq 0$ 且 $c\neq 0$, 那么 $bc^2\neq 0$. 又已知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=2$. 如果 $e=0$, 那么由 $A$ 的导出矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ b & 0 & -e \\ 0 & c & e \\ a-d & -e & -c \\ e & f-a & -b \\ c & b & d-f \end{pmatrix}$$

的第 2, 3, 4 行组成的行列式，其值等于零，即 $\begin{vmatrix} b & 0 & -e \\ 0 & c & e \\ a-d & -e & -c \end{vmatrix}=0$ (其中 $e=0$), 所以 $-bc^2=0$. 这与 $bc^2\neq 0$ 矛盾，因此 $b, c, e$ 全不为零. 再由 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=2$ 可见，由 $\boldsymbol{C}$ 的第 1, 3, 4 行、第 2, 3, 5 行和第 1, 2, 6 行组成的三个行列式，其值都等于零，即

$$\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ 0 & c & e \\ a-d & -e & -c \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} b & 0 & -e \\ 0 & c & e \\ e & f-a & -b \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ b & 0 & -e \\ c & b & d-f \end{vmatrix}=0.$$

对于这三个行列式，把第 $i$ 个按第 $i$ 列展开 $(i=1, 2, 3)$, 得

$$b(e^2-c^2)+ce(a-d)=0,\ \ c(e^2-b^2)-be(f-a)=0,\ \ e(b^2-c^2)-bc(d-f)=0.$$

现在，用 $bce$ 去除这三个等式两边，并整理，得

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{e}=\frac{d}{b}-\frac{e}{c},\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{e}=\frac{f}{c}-\frac{e}{b},\quad \frac{b}{c}-\frac{d}{e}=\frac{c}{b}-\frac{f}{e}.$$ □

利用命题 3, 可以对 3 阶对称矩阵进行分类. 一般地，如果一个对称矩阵 $A$ 的阶数为 $n$, 它的导出矩阵的秩为 $r$, 次导出矩阵的秩为 $r_1$, 那么我们称 $(n, r, r_1)$ 为 **$\boldsymbol{A}$ 的型**. 于是由命题 3 可见，数域 $F$ 上全体 3 阶对称矩阵一共可以分成下列七种类型：

$$(3, 0, 0),\ (3, 2, 0),\ (3, 2, 1),\ (3, 2, 2),\ (3, 3, 0),\ (3, 3, 1),\ (3, 3, 2).$$

假定 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ 是一个 3 阶对称矩阵. 如果 $A$ 的型是 $(3, 0, 0)$, 那么它的导出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是零矩阵，所以 $b=c=e=0$, 并且 $a-d=0$, $f-a=0$, $d-f=0$. 由此可见，$a=d=f$, 因此 $A=aI$, 即 $A$ 是一个纯量矩阵，这里 $I$ 是 3 阶单位矩阵.

如果 $A$ 的型是 $(3, 2, 0)$, 根据命题 3 (4), $A$ 是一个对角矩阵，其主对角线上元素只有两个相等.

如果 $A$ 的型是 $(3, 2, 1)$, 根据命题 3 (2) 和命题 3 (5), $A$ 具有下列三种形状之一：

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix},\ \ b\neq 0\ \text{ 且 }\ (f-a)(f-d)=b^2;$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & f \end{pmatrix},\ \ c\neq 0\ \text{ 且 }\ (d-a)(d-f)=c^2;$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & e & f \end{pmatrix},\ \ e\neq 0\ \text{ 且 }\ (a-d)(a-f)=e^2.$$

如果 $A$ 的型是 $(3, 2, 2)$, 根据命题 3(6), $A$ 的元素 $b, c, e$ 全不为零，并且

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{e}=\frac{d}{b}-\frac{e}{c},\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{e}=\frac{f}{c}-\frac{e}{b},\quad \frac{b}{c}-\frac{d}{e}=\frac{c}{b}-\frac{f}{e}.$$

此外，仿照命题 3, 不难验证，如果 $A$ 的型是 $(3, 3, 0)$, 那么 $A$ 是一个对角矩阵，其主对角线上元素互不相同.

如果 $A$ 的型是 $(3, 3, 1)$, 那么它具有下列三种形状之一：

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix},\ b\neq 0\ \text{ 且 }\ (f-a)(f-d)\neq b^2;$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & f \end{pmatrix},\ c\neq 0\ \text{ 且 }\ (d-a)(d-f)\neq c^2;$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & e & f \end{pmatrix},\ e\neq 0\ \text{ 且 }\ (a-d)(a-f)\neq e^2.$$

如果 $A$ 的型是 $(3, 3, 2)$, 那么 $A$ 具有下列四种形状之一：

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & 0 \\ c & 0 & f \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & e \\ 0 & e & f \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix},$$

其中 $bce\neq 0$, 并且对于前三个矩阵，$a, d, f$ 是数域 $F$ 中的任意数，对于最后一个矩阵，下列三个等式至少有一个不成立：

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{e}=\frac{d}{b}-\frac{e}{c},\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{e}=\frac{f}{c}-\frac{e}{b},\quad \frac{b}{c}-\frac{d}{e}=\frac{c}{b}-\frac{f}{e}.$$

现在，让我们对每一种类型的 3 阶对称矩阵，求出与它可交换的所有 3 阶反对称矩阵.

仍然假定 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ 是数域 $F$ 上的一个 3 阶对称矩阵. 如果 $A$ 的型是 $(3, 0, 0)$, 那么 $A$ 是一个纯量矩阵，所以数域 $F$ 上每一个 3 阶反对称矩阵都与 $A$ 可交换.

如果 $A$ 的型是 $(3, 2, 0)$, 那么 $A$ 的导出矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a-d & 0 & 0 \\ 0 & f-a & 0 \\ 0 & 0 & d-f \end{pmatrix},$$

其中 $a-d,\ f-a,\ d-f$ 这三个数中有一个等于零，另两个不等于零. 于是当 $a-d=0$ 时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{C}X=\boldsymbol{0}$ 的解为 $x=k,\ y=z=0$, 其中 $k$ 是数域 $F$ 中的任意数. 根据命题 2, 与 $A$ 可交换的所有 3 阶反对称矩阵为 $B=\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\forall k\in F$. 类似地，当 $f-a=0$ 或 $d-f=0$ 时，有

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 \end{pmatrix}\ \text{ 或 }\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix},\ \forall k\in F.$$

如果 $A$ 的型是 $(3, 2, 1)$, 那么 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=2$ 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{D})=1$. 根据命题 3(2) 和命题 3(5), 当 $b\neq 0$ 时，$A$ 的导出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 就是 (ii) 式中的矩阵，所以由 $\boldsymbol{C}$ 的第 1 行和第 5 行组成的矩阵，即

$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & f-a & -b \end{pmatrix}$, 其秩也等于 2. 于是方程组 $\boldsymbol{C}X = \mathbf{0}$ 与下列方程组同解：

$$bx = 0, \quad (f-a)y - bz = 0,$$

因而其解为 $x = 0,\ y = kb,\ z = k(f-a),\ \forall k \in F$. 根据命题 2, 与 $A$ 可交换的所有反对称矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & kb \\ 0 & 0 & k(f-a) \\ -kb & -k(f-a) & 0 \end{pmatrix}, \ \forall k \in F.$$

类似地，当 $c \neq 0$ 或 $e \neq 0$ 时，有

$$B = \begin{pmatrix} 0 & k(d-f) & 0 \\ -k(d-f) & 0 & -kc \\ 0 & kc & 0 \end{pmatrix}, \ \forall k \in F \tag{iii}$$

或

$$B = \begin{pmatrix} 0 & ke & k(a-d) \\ -ke & 0 & 0 \\ -k(a-d) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \forall k \in F.$$

如果 $A$ 的型是 (3, 2, 2), 那么 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{C}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{D}) = 2$. 根据命题 3 (6), $b, c, e$ 全不为零，所以由 $\boldsymbol{D}$ 的前两行组成的矩阵，即 $\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ b & 0 & -e \end{pmatrix}$, 其秩也等于 2. 于是方程组 $\boldsymbol{C}X = \mathbf{0}$ 与下列方程组

$$bx + cy = 0, \quad bx - ez = 0$$

同解，因而其解为 $x = \frac{k}{b},\ y = -\frac{k}{c},\ z = \frac{k}{e},\ \forall k \in F$. 根据命题 2, 与 $A$ 可交换的 3 阶反对称矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{b} & -\frac{k}{c} \\ -\frac{k}{b} & 0 & \frac{k}{e} \\ \frac{k}{c} & -\frac{k}{e} & 0 \end{pmatrix}, \ \forall k \in F. \tag{iv}$$

如果 $A$ 的型是 (3, 3, 0), (3, 3, 1) 或 (3, 3, 2), 那么 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{C}) = 3$, 所以方程组 $\boldsymbol{C}X = \mathbf{0}$ 只有零解，因此与 $A$ 可交换的反对称矩阵只能是 3 阶零矩阵.

**例 1.** 设 $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ 且 $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, 并设 $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, 则 $A_1, A_2, A_3$ 都是 3 阶对称矩阵，它们的导出矩阵分别为

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ -6 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 3 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

容易看出，$A_1$ 的导出矩阵与次导出矩阵，其秩分别为 2 和 1, 所以 $A_1$ 的型为 (3, 2, 1). 根据公式 (iii), 在数域 $F$ 上，与 $A_1$ 可交换的所有 3 阶反对称矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & k(1-10) & 0 \\ -k(1-10) & 0 & -k(-6) \\ 0 & k(-6) & 0 \end{pmatrix}, \ 即 \ \begin{pmatrix} 0 & -9k & 0 \\ 9k & 0 & 6k \\ 0 & -6k & 0 \end{pmatrix}, \ \forall k \in F.$$

其次，不难计算，$A_2$ 的导出矩阵与次导出矩阵，其秩都是 2, 所以 $A_2$ 的型为 (3, 2, 2). 根据公式 (iv), 在数域 $F$ 上，与 $A_2$ 可交换的所有 3 阶反对称矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & k & -\frac{k}{3} \\ -k & 0 & \frac{k}{3} \\ \frac{k}{3} & -\frac{k}{3} & 0 \end{pmatrix},\ \forall\, k \in F.$$

再次，注意到 $\boldsymbol{C}_3$ 是列满秩的，因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{C}_3 X = \mathbf{0}$ 只有零解．根据命题 2，与 $A_3$ 可交换的 3 阶反对称矩阵只能是 3 阶零矩阵．

**参考文献**


[1] 张禾瑞等．高等代数 (第四版) [M]. 北京：高等教育出版社，1999.

[2] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组．高等代数 (第三版) [M]. 北京：高等教育出版社，2003.


# Anti-Symmetric Matrices Which Are Commutative with Symmetric Matrices


HUANG Yi-Sheng, YAO Hai-Lu

(*Department of Mathematics And Computer Science, Sanming College, Sanming, Fujian* 365004)



**Abstract.** In this paper, we introduce the concepts of the induced matrix and sub-induced matrix of a symmetric matrix, and obtain two equivalent conditions that an $n$-order symmetric matrix and an $n$-order anti-symmetric matrix are commutative. At the same time, using the ranks of induced matrix and sub-induced matrix, we give a partition of 3-order symmetric matrices. Moreover, for each class of 3-order symmetric matrices, we find all 3-order anti-symmetric matrices which are commutative with this class of matrices.



**Key words.** symmetric matrix; anti-symmetric matrix; commutativity; induced matrix; sub-induced matrix.